La música en los grandes matemáticos de Occidente

Carlos Eduardo Beltrán Reyes*

Recibido: agosto 15 de 2013 Aprobado: octubre 15 de 2013

Artículo de reflexión

Para citar este artículo/ To reference this article

Beltrán, C. (2013). *La música en los grandes matemáticos de occidente.* Música Cultura y Pensamiento. Vol 5, Nº 5, pp 111-117

Resumen. Los grandes físico-matemáticos de Occidente como Fourier, Euler, Mersenne, D'Alembert Galileo, Lagrange, Bernoulli, nunca estuvieron ajenos a la música. Prueba de esto son sus innumerables tratados, libros o compendios que versaron sobre temas como la proporción armónica, el sonido musical, la tensión de las cuerdas, la escala común y la numérica, o las cuerdas accidentales. Ya desde la antigüedad existen referencias que informan que la escuela pitagórica estaba influenciada por sus conocimientos sobre las medias (aritmética, geométrica y armónica), las cuales se habían retomado para la escala numérica llamada hoy *Diatónica* (Guthrie, 1999, p. 17). En el presente artículo se pretende explorar la forma como la música ha sido tratada por estos matemáticos.

Palabras Claves: Proporción, armonía, escala numérica, escala cromática, relaciones numéricas.

The music in the great Western mathematicians

Abstract. Great Western mathematicians physicists, as Fourier, Euler, Mersenne, Galileo D'Alembert, Bernoulli, were never outside the music. Proof of this are their incontable treaties, books or compendia dealing with topics like the harmonic proportion, musical sound, strings tension, the common and numeric scale, or accidental strings. Since ancient times there are references that inform, that the Pythagorean school was influenced by their knowledge of the average (Arithmetic, geometric and harmonic), which had been re-used for the numerical scale now called Diatonic (Guthrie, 1999, p. 17) This article is intended to explore how the music has been treated by these mathematicians.

Key Words: Proportion, harmony, numerical scale, chromatic scale, numerical relationships.

*. Carlos Eduardo Beltrán es matemático por la Universidad de Leipzig, magister en matemáticas por la Universidad de Heidelberg, magister en administración por el Instituto Tecnológico de Monterrey. Profesor de matemáticas de la Universidad de Ibagué. carlos.beltran@unibague.edu.co

Antonio Eximeno en su tratado *Del origen y reglas de la música* comenta que "es un antiguo error suponer que la música se deriva de las proporciones matemáticas" (Eximeno, 1978, p. 63). El presente escrito no pretende tal cosa, intenta hacer un corto desarrollo histórico de la música en relación con los aportes que le hicieron grandes matemáticos. Una primera parte o entrega estará dedicada a notas históricas sobre matemáticos de la antigüedad hasta el siglo XVIII. La segunda, a aquellos personajes que hicieron interesantes aportaciones en los siglos XIX y XX, cuando se da comienzo a la aplicación de técnicas matemáticas para la composición de música, en formas o corrientes musicales como el Dodecafonismo, el Serialismo integral y la música estocástica.

La escala musical de 12 notas utilizada actualmente en Occidente no es producto de la casualidad, es consecuencia de una búsqueda de sonidos que se pueden combinar armónicamente mediante ciertas proporciones matemáticas. Igualmente, la construcción de una escala a partir de una nota se logra mediante unos intervalos (la octava, la quinta y la cuarta) y un procedimiento matemáticamente repetitivo que utilizaron en su tiempo los pitagóricos, quienes fueron los primeros de los que se tenga constancia de que hiciesen un estudio de la escala musical, utilizando las propiedades y relaciones de la armonía musical, la cual estaría determinada por los números, ya que pensaron que las relaciones de estos son las relaciones de todas las cosas. Para ellos los números fueron lo primero en toda la naturaleza.

Pitágoras influenció a los pitagóricos (siglos VI-III a.C) al heredarles sus conocimientos sobre las medias (aritmética, geométrica y armónica) y su misticismo por los números naturales y la música. Es conocido que en su afán por explicar de forma matemática los intervalos, fue sorprendido por el sonido rítmico que producía el golpe de los martillos en el yunque de un herrero.

Utilizando cinco martillos pudo comprobar que uno rompía la escala de sonidos porque tenía un peso que no estaba en relación numérica con los otros cuatro, por lo cual lo eliminó y, con los restantes, obtuvo conclusiones que abrieron camino para la música en Occidente. Si nos atenemos al relato que hiciera *Boecio*, escritor que vivió en el siglo VI después de Cristo, es ilustrativo recordar los siguiente:

> Pitágoras, obsesionado por el problema de explicarse matemáticamente los intervalos fijos de la escala, al pasar frente a una herrería, le llamó la atención la musicalidad de los golpes de los martillos sobre el yunque. Entró y observó largamente. Luego, al experimentar, utilizó cinco martillos. El peso de cuatro de ellos estaba en la proporción de 12, 9, 8 y 6. El quinto, cuyo peso no correspondía a relación numérica alguna con el resto, era el que echaba a perder la perfección del repiqueteo. Fue retirado y Pitágoras volvió a escuchar. El mayor de los martillos, cuyo peso era doble del más pequeño, daba la octava más baja. Como los pesos de los otros dos martillos (9 y 8) correspondían a las medias aritmética y armónica respectivamente de los primeros pesos (12 y 6), pensó que aquellos dos martillos le darían las otras notas fijas de la escala (O`Meara, 1989, p. 11).

Esto lo llevó a probar con cuerdas cuyas longitudes eran de razones 1:2 y 2:3 (media armónica de 1 y 2) y 3:4 (media aritmética de 1 y 2), con lo cual pudo comprobar que producían combinaciones de sonidos me-

Música, cultura y pensamiento 2014 | Vol. 5 | No. 5 | 111 - 117

lódicamente agradables, logrando construir una escala a partir de estas proporciones. Para guía del lector, en matemática 3:4 es la media aritmética de 1 ½, mientras que 2:3 es la media armónica de 1 ½.

En la Edad media se les llamaba a estos intervalos diapasón, diapente y diatesarón. Hoy los llamamos octava, quinta y cuarta porque corresponden a esas notas de la escala pitagórica diatónica (do, re, mi, fa, sol, la, si, do).

Las tres medias (armónica, geométrica y aritmética) forman una progresión geométrica. Sin embargo posteriores trabajos hechos por monjes en la Edad media harán que esta sea rechazada por su inconmensurabilidad. Siglos más tarde, el matemático Mersenne creó la escala cromática para corregir esta desviación ya que correspondía exactamente al *Fa sostenido* de la escala cromática.

Existen referencias de que Claudio Ptolomeo, el matemático greco-egipcio (año 100- 170 d.C) incursionó en el mundo de la música. De hecho, en su tratado de teoría musical "*Harmónicos*", hizo un análisis comparativo de los fundamentos de la música griega y la pitagórica de su época. Pensaba que *"en las leyes matemáticas subyacen los sistemas musicales como en los cuerpos celestes y que, por tanto, ciertas notas se correspondían con ciertos planetas y las distancias entre estos y sus movimientos"* (Newton, 1977, p.31). Esta idea había sido propuesta por Platón en el mito de la música de las esferas, música no escuchada ya por nosotros pero que es producida por la revolución de los planetas.

El Siglo de las luces: de la Ilustración (siglo XVII) al siglo XVIII.

El Siglo de las luces se inicia con referencias a la música. La primera obra de René Descartes, también llamado Renatus Cartesius (1596 - 1650) fue *Compendium Muiscae*, que significa el Compendio de Música. En éste se describen y explican las proporciones matemáticas que se dan en las vibraciones armónicas de las cuerdas musicales. Llama la atención que su dedicatoria reza *"escrito con prisa solo para vos"*(Descartes,1683 p.3), y se le habla al lector de las pasiones, aquellas engendradas en el alma por el sonido armónico de la música.

El compendio, que fuera escrito durante su alistamiento como caballero voluntario en el ejército del Príncipe de Orange (Holanda), lo realizó mientras trataba e investigaba temas de la milicia: la balística, la ingeniería militar y la navegación. Fue terminado para el 31 de Diciembre de 1618 y sirvió de regalo de año nuevo a Beeckman, quien para su época era un destacado físico-matemático y gran teórico musical, se dedicaba a estudiar las consonancias y disonancias físicas, así como la teoría de los modos y todas aquellas cuestiones relacionadas con el placer de la audición.

En el Compendio de la música, Descartes analiza por qué la *Quarta* (Cuarta) no suena tan bien como sí acontece con la Quinta. En la misma línea iniciada por el gran Pitágoras en su serie armónica, la *Quarta* es en realidad un armónico de la Quinta. En el siguiente párrafo, Descartes va un paso más allá que Pitágoras en sus ideas sobre la vibración de las cuerdas, al afirmar que *"de Dítono, Tertia y Sextia los sonidos más agradables, lo son porque son en realidad de proporción múltiple del fundamental, con lo que nos introduce en el concepto teórico de que la cuerda vibra en varias ondas que son múltiplo de la fundamental"* (Descartes,1618, pp. 19-22). Infortunadamente

Descartes no profundizó más sobre estos problemas que fueron resueltos en el siglo siguiente.

La escala cromática o temperada

Para el siglo XII compositores y músicos empezaron a separarse de la tradición de la escuela pitagórica, creando nuevos estilos y tipos de música. Esto los llevó a crear diferentes formas de afinar, si bien seguían utilizando las matemáticas para poder calcular los intervalos sin seguir los principios de los pitagóricos. Este cambio causó desacuerdo entre los matemáticos, quienes querían una estricta fidelidad y adherencia a sus fórmulas, mientras que los músicos buscaban reglas fáciles de aplicar.

La solución hallada fue la escala cromática, desarrollada mucho antes para resolver los constantes problemas de afinación. Gracias a ella se pudo descubrir que se podía cambiar de una tonalidad a otra sin tener que modificar la afinación de cualquier instrumento de la época. Esta escala no se popularizó hasta 1627, cuando el fraile, filósofo y matemático Mersenne (1588 –1648) publicara su obra *Harmonie universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique*, en la que estudiaría diversos campos de la teología, las matemáticas y la teoría musical. Sería Marsenne quién formulara las invaluables reglas para afinar que son usadas hoy en día.

La escala cromática es la forma musical que permite mantener series dentro de un espacio definido. La transición de la afinación pitagórica a la cromática llevó siglos y ocurrió de forma paralela al cambio en la relación entre la forma tradicional y la nueva. Entre quienes se interesaron por la relación habida entre la música, las matemáticas y la escala cromática se destacan músicos del Barroco tardío -entre 1700 y 1750- como Vivaldi, Handel y Bach. Para estos siglos, la orquestación creció en complejidad y el arte del contrapunto alcanzó su máxima expresión con Bach. Así mismo la ópera se popularizó por toda Europa. Ya para la época del Clasicismo (1750-1820) se utilizó la escala cromática con gran conocimiento y maestría por Mozart, Haydn y Beethoven, pero también se retornó a una música más sencilla, de estilo galante.

Pero, ¿de qué trata esta escala cromática, referenciada en *Armonía universal*? Esta permite la creación de una sucesión en la que todos los intervalos son iguales, dividiendo la escala de *do* a *do* en 12 partes iguales (12 semitonos). Con la escala cromática se resolvía un viejo problema, el de cambiar de tonalidad, el modular sin tener que volver a ajustar la afinación. El viejo problema de la 'coma pitagórica' había desaparecido.[2]

Para calcular la frecuencia de cada nota en la escala cromática, Mersenne enunciaba que dada su escala (para encontrar la nota La), se debería usar la siguiente fórmula: F (i)= 440 * 2 i/12, donde (i) es la escala o la distancia de la nota *La*. Aclarando que si F (i)

2. La coma pitagórica es un intervalo musical que resulta de la diferencia entre doce quintas perfectas y siete octavas. Su expresión numérica es $\left(\frac{3}{2}\right)^2 : 2^7 = \frac{531441}{524288}$ y su magnitud es de 23,46 *cents*, siendo esto algo menos de la cuarta parte de un *semitono* temperado.

   Para el sistema de *afinación pitagórico* que construye la escala utilizando exclusivamente quintas perfectas, el círculo de quintas no se cierra porque las doce quintas del círculo (con su correspondiente reducción de las octavas necesarias) no equivalen al unísono ni a la octava. Dicho de otra forma: el sucesivo encadenamiento de factores de frecuencia iguales a 3:2 (la quinta) nunca produce un valor que se pueda reducir a la relación 2:1 (la octava). Ningún número es al mismo tiempo potencia de 3 y de 2, salvo la unidad, que representa el *unísono*. La quinta que se usa artificialmente para completar el círculo es una coma pitagórica menor que la *quinta* justa, y se conoce como quinta del lobo.

es negativa, la tecla, en el caso del órgano o el clavecín, estaría a la izquierda.

Tomemos como ejemplo lo siguiente: se quiere encontrar la frecuencia de la nota Do del teclado de un clavecín, la cual se encuentra a nueve teclas a la izquierda. Al utilizar la fórmula tendremos: 440 * 2 -9/12 = 261.63

Antonio Eximeno, en su tratado titulado *Del origen y reglas de la música* (1978), presenta una interesante comparación y diferenciación entre las frecuencias de las escalas natural, pitagórica y cromática.

Escala Natural: 275.00 302.50 330.00 357.50 385.00 412.50 440.00 495.00

Escala Pitagórica: 260.74 278.44 293.33 309.03 330.00 347.65 371.25 391.11 417.66 440.00 463.54 495.00

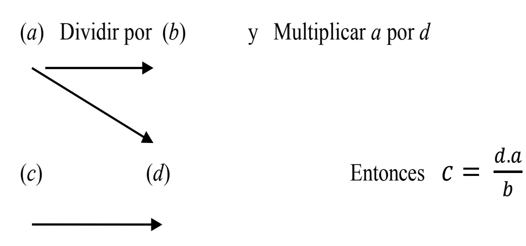
Escala Cromática: 261.63 277.18 293.66 311.13 329.63 349.23 369.99 392.00 415.30 440.00 466.16 493.88

La traducción de *L'Harmonie universelle* (1636) hecha por Mersenne muestra que esta obra trata sobre la teoría musical y los instrumentos musicales. Una de las mayores contribuciones en este campo es la idea según la cual dos veces la raíz de $\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}}$ era la razón principal de un semitono.

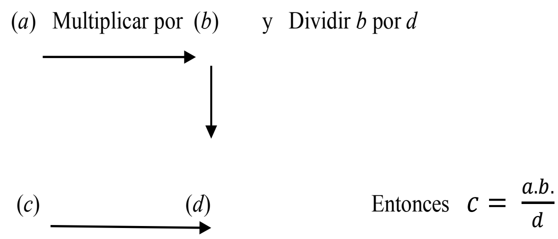
Este valor, calculado para su época, era algo más afinado que el calculado en 1588 por el gran genio matemático y físico italiano Galileo Galilei (1564 –1642) y que todavía se utiliza: 18/17. Lo interesante de este aporte de Mersenne es que tenía la cualidad de poderse construir de una forma directa con escuadra y un compás. La descripción que hiciera Mersenne de la determinación de la primera frecuencia absoluta de un tono audible, hoy conocido como 84 Hz, implicaba que, para entonces, ya había podido demostrar que la razón de la frecuencia absoluta de dos cuerdas vibrantes, que dan un tono musical y su octava es 1:2. Por tanto, la armonía percibida (consonancia) de tales notas se explicó gracias a que la razón de las frecuencias de la oscilación del aire también era 1:2, lo que ofrecía consistencia a la hipótesis de la equivalencia entre las frecuencias de la fuente y el movimiento del aire, que ya se conocían para la época.

El *Traité de l'harmonie universelle* (1627) se considera la fuente teórica de la música del siglo XVII, especialmente en la Francia de las luces y la Ilustración, donde rivalizó incluso con las obras del gran teórico italiano Pietro Cerone. (1566 – 1625). Al vibrar las cuerdas, se emiten sonidos. Mersenne hizo unas reglas o enunciados basados en la proporcionalidad sobre estas vibraciones.

Una proporción no es más que una igualdad entre dos o más fracciones. La proporción es directa si relaciona magnitudes en las que, al aumentar una, también lo haga la otra y viceversa. En este caso la regla de tres se aplicará de la siguiente manera:



Ahora bien, la proporción es inversa si implica una relación de magnitudes en que, al aumentar una, la otra disminuye y viceversa. En este caso la regla de tres se aplicará de la siguiente manera:



La frecuencia del sonido producida por una cuerda cumple los siguientes enunciados, conocidos como las *Leyes de Marsenne*.

El sonido producido por una cuerda es:

I. Inversamente proporcional a la longitud de las mismas.
II. Directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión a la que está sometida.
III. Inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad de la misma
IV. Inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la sección de la misma, o lo que es lo mismo, a su diámetro.
V. Inversamente proporcional a la temperatura, al dilatar la cuerda y hacerle perder tensión (Marsenne, 1636, p. 11).

Este curioso comportamiento de una cuerda al vibrar generó un interés excepcional nunca antes visto entre los matemáticos, *"dando lugar a una de las controversias más encendidas y fructíferas en la historia de las Matemáticas"* (Marsenne, 1636, p.35).

Para el siglo XVIII, la matemática no se encontraba lo suficientemente avanzada como para abordar este problema. En 1715, Brook Taylor (1685 - 1731) encontró que el movimiento de un punto cualquiera (arbitrario) de la cuerda es el de un péndulo simple y, como consecuencia de esto, la forma de la curva que toma la cuerda en un instante conocido o dado, debería ser sinusoidal (función trigonométrica seno).

Pero existe un problema, pues el sonido fundamental correspondiente a la vibración pendular no es el único que emite la cuerda al vibrar. Al hacer esto, se puede observar que simultáneamente se producen otros sonidos de menor intensidad, llamados 'parciales'. La distribución e intensidad de estos parciales (*timbre*) son los que diferencian a los instrumentos o voces que ejecuten la misma nota.

Para esa época ya se conocía que, en el caso de los instrumentos de cuerda y viento, las frecuencias de los sonidos parciales son múltiplos de la frecuencia fundamental *F* y que, de estos múltiplos (armónicos), el primero es la propia frecuencia fundamental, el segundo corresponderá al doble (*2F*), el tercer armónico será el triple (*3F*) y así sucesivamente.

La solución final del problema fue hallada ya bien avanzado el siglo XII gracias a Joseph Fourier (1768 - 1830). Este trabajo es conocido en matemáticas como el análisis armónico o análisis de Fourier y estudia la representación de funciones o señales como superposición de ondas "básicas" o armónicos, que abrieron las posibilidades a nuevas formas sonoras para el siglo XX.

Históricamente se conoce que en este interesante debate participaron grandes genios de la física matemática. Es muy conocido el debate que se dio entre Johann Bernoulli y Leonhard Euler, al igual que entre Jean-le-Rond D'Alembert, J. L. Lagrange y L. Dirichlet. Este trabajo se ha convertido hoy en herramienta con enormes posibilidades para aplicaciones en diferentes campos. El conocimiento de ellas apoyó el nacimiento del Dodecafonismo o música dodecafónica, y de la música estocástica, de la que también podría decirse que se caracteriza por masas de sonido, "nubes" o "galaxias", donde el número de elementos es tan grande que la conducta de un elemento individual no puede ser determinada, pero sí la del todo, en la cual sin duda está implícita la Matemática.

Referencias

Bergasa, J. (2003). *Laplace: el matemático de los cielos*. Editorial Porrua, Barcelona. pp 38,

Calinger, R. (1996). *Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727–1741). Historia Mathematica* 23 (2) : pp. 125.

Descartes , R. (1618). Cumpendium Musicae. Amstelodami : Ex Typographica Blaviana

Dunham, W. (1999). «1,4». *Euler: The Master of Us All*. USA. The Mathematical Association of America.

Eximeno, A. (1978).*Del origen y reglas de la música*,. Editorial, Torregalindo, 10 Madrid-16. pp.63

Guthrie, W.K.C. (1999 [1ª edición, 3ª reimpresión]). *Historia de la Filosofía Griega. Vol. I: Los primeros presocráticos y los pitagóricos*. Editorial Gredos: Madrid. ISBN 84-249-0949-6.

Jámblico M. (2003). *Vida pitagórica. Protréptico*. Madrid: Editorial Gredos. ISBN 978-84-249-2397-6.pp 19

Kirk, G.S., Raven, J.E., y Schofield, M (2008). *Los filósofos presocráticos. Historia crítica con selección de textos*. Edición revisada, tapa dura. Madrid: Editorial Gredos. ISBN 978-84-249-3567-2. pp 56, 103

Marsenne, M. (1636). *Harmonie universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique.*, traducción. p.35.

Marsenne, M. (1644) *Universae geometriae synopsis*, recapitulación del *Euclidis* de 1626 con nuevos comentarios y notas.

Newton, R. R. (1977). *The Crime of Claudius Ptolemy*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Nobbe, C. F. A., ed. (1843). *Claudii Ptolemaei Geographia*. 3 vols. Lipsiae (Leipzig): Carolus Tauchnitus. pp18.

Cibergrafía

http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-ibaibarriaga.pdf

http://es.wikipedia.org/wiki/Monocordio

http://www.paideiapoliteia.org.ar/docs/ch003.htm